CHAPITRE 4

EXEMPLES

Dans ce quatrième chapitre, nous allons présenter quelques exemples de tables de caractères.

Proposition 4.1 *Soit un groupe abélien fini G. Alors toutes les représentations irréductibles de G sont de degré 1 et $|G^\vee| = |G|$.*

Preuve: Parce que G est abélien, alors la classe de conjugaison $cl(g)$ de g est égale à $\{g\}$. Conséquemment $|G| = |Cl(G)| = |G^\vee|$. Par le corollaire 3.5 (c), le fait que $\chi(e) \in \mathbf{N}$ et $\chi(e) \geq 1$ pour tout $\chi \in G^\vee$, nous obtenons

$$|G^\vee| \leq \sum_{\chi \in G^\vee} (\chi(e))^2 = |G| = |G^\vee| \quad \Rightarrow \quad \chi(e) = 1 \quad \text{pour tout } \chi \in G^\vee.$$

De ceci, nous obtenons que toutes les représentations irréductibles de G sont de degré 1. La proposition est vérifiée.

4.2 Table de caractères de $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$. Parce que $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ est abélien, alors toutes ses représentations irréductibles sont de degré 1. Étant donné une représentation irréductible R, notons le nombre complexe $R(1 + n\mathbf{Z})$ par α. Alors $R(k + n\mathbf{Z}) = \alpha^k$ pour tout $k \in \mathbf{Z}$. Comme $\alpha^n = R(n + n\mathbf{Z}) = R(n\mathbf{Z}) = 1$, alors α est une racine $n$ième de l'unité. Ceci nous donne une condition nécessaire pour les valeurs prises par R et son caractère.

Fixons une racine primitive $n$ième de l'unité ζ, par exemple $\zeta = \exp(2\pi i/n)$. Pour $h = 0, 1, 2, \ldots, (n-1)$, posons

$$R_h : \mathbf{Z}/n\mathbf{Z} \to \mathbf{C}^\times \quad \text{défini par} \quad R_h(k + n\mathbf{Z}) = \zeta^{hk}.$$

Il est facile de vérifier que, pour chaque $h = 0, 1, 2, \ldots, (n-1)$, R_h est un homomorphisme de groupes bien défini , i.e. R_h est une représentation. Nous obtenons ainsi n représentations irréductibles distintes. En effet, il est clair qu'elles sont irréductibles, parce que de degré 1. Elles sont distinctes, parce que si nous supposons le contraire, alors il existe $0 \leq h < h' \leq n$ tels que $R_h = R_{h'}$. Mais alors de $\zeta^h = R_h(1 + n\mathbf{Z}) = R_{h'}(1 + n\mathbf{Z}) = \zeta^{h'}$, nous obtenons que $\zeta^{h'-h} = 1$ avec $0 < (h' - h) < n$ et ceci contredit notre hypothèse que ζ est une racine primitive $n$ième de l'unité. Nous obtenons ainsi tous les caractères irréductibles de $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$.

Exemple 4.3 Pour illustrer la table de caractères obtenue en 4.2 dans le cas où $G = \mathbf{Z}/5\mathbf{Z}$, fixons $\zeta = \exp(2\pi i/5)$. Alors la table de caractères de $\mathbf{Z}/5\mathbf{Z}$ est

$\mathbf{Z}/5\mathbf{Z}$	0	1	2	3	4
χ_0	1	1	1	1	1
χ_1	1	ζ	ζ^2	ζ^3	ζ^4
χ_2	1	ζ^2	ζ^4	ζ	ζ^3
χ_3	1	ζ^3	ζ	ζ^4	ζ^2
χ_4	1	ζ^4	ζ^3	ζ^2	ζ

Lemme 4.4 *(a) Soient $R' : H \to GL(U')$, une représentation de H de caractère $\chi' : H \to \mathbf{C}$ et $R'' : K \to GL(U'')$, une représentation de K de caractère $\chi'' : K \to \mathbf{C}$. Alors*

$$R : H \times K \to GL(U' \otimes U'') \quad \textit{définie par} \quad R(h,k)(u' \otimes u'') = R'(h)(u') \otimes R''(k)(u'')$$

pour tout $h \in H$, $k \in K$, $u' \in U'$ et $u'' \in U''$, est une représentation du produit direct $H \times K$ de H et K dont le caractère χ est donné par $\chi(h,k) = \chi'(h)\chi''(k)$ pour tout $(h,k) \in H \times K$. De plus, si R' et R'' sont irréductibles, alors R est irréductible.

(b) Soit un caractère $\chi : H \times K \to \mathbf{C}$ irréductible du produit direct $H \times K$ de H et K. Alors il existe un caractère $\chi' : H \to \mathbf{C}$ irréductible de H et un caractère $\chi'' : K \to \mathbf{C}$ irréductible de K tels que $\chi(h,k) = \chi'(h)\chi''(k)$ pour tout $h \in H$ et $k \in K$.

Preuve: (a) Nous n'allons qu'esquisser la preuve. Nous pouvons définir $R(h,k)$ en notant que

$$U' \times U'' \to U' \otimes U'' \quad \text{défini par} \quad (u', u'') \mapsto R'(h)(u') \otimes R''(k)(u'')$$

est bilinéaire. De plus $R(h,k) \in GL(U' \otimes U'')$ parce que son inverse est obtenu en considérant $R(h^{-1}, k^{-1})$. Il est aussi facile de vérifier que R est un homomorphisme de groupes et son caractère est $\chi(h,k) = \chi'(h)\chi''(k)$ en utilisant la bilinéarité de $\otimes$.

Si R' et R'' sont irréductibles, alors χ' et χ'' sont des caractères irréductibles. Pour vérifier que R est irréductible, nous pouvons utiliser la proposition 3.2. En effet,

$$\begin{aligned}(\chi,\,\chi)_{H\times K} &= \frac{1}{|H\times K|}\sum_{(h,k)\in H\times K}\chi(h,k)\overline{\chi(h,k)} = \frac{1}{|H|\,|K|}\sum_{(h,k)\in H\times K}\chi'(h)\chi''(k)\overline{\chi'(h)\chi''(k)} \\ &= \left(\frac{1}{|H|}\sum_{h\in H}\chi'(h)\overline{\chi'(h)}\right)\left(\frac{1}{|K|}\sum_{k\in K}\chi''(k)\overline{\chi''(k)}\right) = (\chi',\,\chi')_H\,(\chi'',\,\chi'')_K = 1\end{aligned}$$

et conséquemment χ est irréductible.

(b) Montrons premièrement que si $\chi_1', \chi_2' \in H^\vee$ et si $\chi_1'', \chi_2'' \in K^\vee$ sont tels que $\chi_1'(h)\chi_1''(k) = \chi_2'(h)\chi_2''(k)$ pour tout $h \in H$ et $k \in K$, alors $\chi_1' = \chi_2'$ sur H et $\chi_1'' = \chi_2''$ sur K. En effet, si nous définissons $\chi_1(h,k) = \chi_1'(h)\chi_1''(k)$ et $\chi_2(h,k) = \chi_2'(h)\chi_2''(k)$ pour tout $(h,k) \in H \times K$, alors par (a) et par hypothèse, $\chi_1 = \chi_2$ est un caractère irréductible de $H \times K$ et nous obtenons

$$\begin{aligned}1 = (\chi_1,\chi_1)_{H\times K} = (\chi_1,\chi_2)_{H\times K} &= \frac{1}{|H\times K|}\sum_{(h,k)\in H\times K}\chi_1'(h)\chi_1''(k)\overline{\chi_2'(h)\chi_2''(k)} \\ &= \left(\frac{1}{|H|}\sum_{h\in H}\chi_1'(h)\overline{\chi_2'(h)}\right)\left(\frac{1}{|K|}\sum_{k\in K}\chi_1''(k)\overline{\chi_2''(k)}\right) = (\chi_1',\,\chi_2')_H\,(\chi_1'',\,\chi_2'')_K.\end{aligned}$$

Comme χ_1' et χ_2' sont des caractères irréductibles de H, alors par l'orthogonalité

$$(\chi_1',\,\chi_2')_H = \begin{cases} 1, & \text{si } \chi_1' = \chi_2'; \\ 0, & \text{si } \chi_1' \neq \chi_2'. \end{cases}$$

De même comme χ_1'' et χ_2'' sont des caractères irréductibles de K, alors par l'orthogonalité

$$(\chi_1'',\,\chi_2'')_K = \begin{cases} 1, & \text{si } \chi_1'' = \chi_2''; \\ 0, & \text{si } \chi_1'' \neq \chi_2''. \end{cases}$$

De ce qui précède, pour que $(\chi_1', \chi_2')_H\,(\chi_1'', \chi_2'')_K = 1$, alors nous devons avoir $(\chi_1', \chi_2')_H = 1$, $(\chi_1'', \chi_2'')_K = 1$, $\chi_1' = \chi_2'$ et $\chi_1'' = \chi_2''$.

Si nous considérons tous les caractères irréductibles χ de $H \times K$ de la forme $\chi(h,k) = \chi'(h)\,\chi''(k)$ pour tout $(h,k) \in H \times K$, alors nous avons ainsi $|H^\vee| \times |K^\vee|$ caractères irréductibles distincts. Nous noterons ces caractères χ par $\chi' \times \chi''$ et l'ensemble de ces caractères par $H^\vee \times K^\vee$. Nous avons ainsi

$$\begin{aligned}|H|\,|K| = \left(\sum_{\chi'\in H^\vee}\big(\chi'(e_H)\big)^2\right)\left(\sum_{\chi''\in K^\vee}\big(\chi'(e_K)\big)^2\right) &= \sum_{\chi'\times\chi''\in H^\vee\times K^\vee}\big((\chi'\times\chi'')(e_H,e_K)\big)^2 \\ &\leq \sum_{\chi\in(H\times K)^\vee}\big(\chi(e_H,e_K)\big)^2 = |H|\,|K|.\end{aligned}$$

De ceci, nous pouvons conclure que tout caractère irréductible χ de $H \times K$ peut s'écrire d'une et d'une seule façon sous la forme $\chi' \times \chi''$ avec $\chi' \in H^\vee$ et $\chi'' \in K^\vee$.

4.5 Table de caractères de groupe abélien fini. Nous pouvons maintenant utiliser le lemme précédent et la table de caractères des groupes abéliens cycliques en 4.2 pour déterminer la table de caractères de tout groupe abélien fini. En effet, tout groupe abélien fini est un produit direct de groupes abéliens de la forme $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$. Nous allons maintenant illustrer ceci dans un exemple.

Exemple 4.6 Considérons le groupe abélien $\mathbf{Z}/3\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$. Les tables de caractères de $\mathbf{Z}/3\mathbf{Z}$ et de $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ sont respectivement

$\mathbf{Z}/3\mathbf{Z}$	0	1	2
χ'_0	1	1	1
χ'_1	1	α	α^2
χ'_2	1	α^2	α

$\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$	0	1
χ''_0	1	1
χ''_1	1	-1

où $\alpha = \exp(2\pi i/3) = (-1 + \sqrt{3}\, i)/2$. Nous avons énuméré les classes de conjugaison en donnant un représentant pour chacune d'elles. Alors la table des caractères de $\mathbf{Z}/3\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ est

$\mathbf{Z}/3\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$	(0, 0)	(0, 1)	(1, 0)	(1, 1)	(2, 0)	(2, 1)
$\chi'_0 \times \chi''_0$	1	1	1	1	1	1
$\chi'_0 \times \chi''_1$	1	-1	1	-1	1	-1
$\chi'_1 \times \chi''_0$	1	1	α	α	α^2	α^2
$\chi'_1 \times \chi''_1$	1	-1	α	$-\alpha$	α^2	$-\alpha^2$
$\chi'_2 \times \chi''_0$	1	1	α^2	α^2	α	α
$\chi'_2 \times \chi''_0$	1	-1	α^2	$-\alpha^2$	α	$-\alpha$

Nous allons maintenant déterminer les caractères irréductibles du groupe symétrique S_n pour $n = 2, 3$ et 4. Auparavant nous fixons les notations et rappelons quelques faits bien connus concernant les classes de conjugaison dans S_n.

Rappel 4.7 Le groupe symétrique S_n est l'ensemble des permutations de l'ensemble $\{1, 2, \ldots, n\}$, i.e. l'ensemble des bijections $w : \{1, 2, \ldots, n\} \to \{1, 2, \ldots, n\}$ et la loi de composition du groupe est la composition des fonctions. Nous noterons ces permutations sous deux formes. La première est d'écrire l'élément $w \in S_n$ comme la matrice d'ordre $2 \times n$ suivante:

$$w = \begin{bmatrix} 1 & 2 & \ldots & (n-1) & n \\ w(1) & w(2) & \ldots & w(n-1) & w(n) \end{bmatrix}.$$

La seconde forme est d'écrire w sous sa forme cyclique. Il s'agit d'écrire les orbites de l'action du groupe cyclique engendré par w en ordonnant les éléments de chaque cycle selon l'ordre des puissances de w. Il est plus simple d'illustrer ceci dans un exemple. Ainsi la forme cyclique de

$$w = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 3 & 6 & 2 & 10 & 9 & 1 & 5 & 8 & 7 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{est} \quad (1, 3, 2, 6)(4, 10)(5, 9, 7)(8).$$

Cette forme cyclique n'est pas unique. Pour l'exemple précédente, nous aurions aussi pu écrire w comme $(2, 6, 1, 3)(4, 10)(9, 7, 5)(8)$. Dans tous les cas, il est simple de récupérer la forme matricielle de chacune de ces formes. Le type cyclique $\lambda(w)$ d'une permutation $w \in S_n$ est le partage $\lambda(w) : \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots \geq \lambda_k \geq \ldots$ de n, i.e. $\sum_k \lambda_k = n$, obtenu en ordonnant de façon décroissante la taille des cycles de la forme cyclique de w. Par exemple, le type cyclique de l'élément w ci-dessus est $\lambda(w) : 4 \geq 3 \geq 2 \geq 1$.

Il est bien connu que deux permutations sont conjugués si et seulement si elles ont le même type cyclique. Nous déterminerons plus tard la cardinalité de chacune des classes de conjugaison lorsque nous étudierons les représentations de S_n. Nous n'aurons pas besoin de ceci pour l'instant pour déterminer les tables de caractères de S_2, S_3 et S_4

Définition 4.8 À toute permutation $w \in S_n$, nous pouvons lui associer deux entiers: sa **longueur** notée $\ell(w)$ et son **signe** noté $\varepsilon(w)$. Ces nombres sont définis par

$$\ell(w) = \{(i,j) \mid 1 \le i < j \le n,\ w(i) > w(j)\} \in \mathbf{N} \quad \text{et} \quad \varepsilon(w) = (-1)^{\ell(w)} \in \{-1, 1\}.$$

Lemme 4.9 *Soit $n \in \mathbf{N}$, $n \ge 1$.*

(a) Si $w \in S_n$, alors $\ell(w^{-1}) = \ell(w)$.

(b) Si $w, w' \in S_n$, alors $\ell(ww') \equiv \ell(w) + \ell(w') \pmod 2$ et $\varepsilon(ww') = \varepsilon(w)\varepsilon(w')$.

(c) $\varepsilon : S_n \to \mathbf{C}^\times$, défini par $w \mapsto \varepsilon(w)$, est une représentation de S_n de degré 1.

Preuve: (a) Si (i,j) est tel que $1 \le i < j \le n$ et $w(i) > w(j)$, alors $(w(j), w(i))$ est tel que $1 \le w(j) < w(i) \le n$ et $w^{-1}(w(j)) = j > i = w^{-1}(w(i))$. Conséquemment $\ell(w) \le \ell(w^{-1})$ et par symétrie $\ell(w^{-1}) \le \ell(w)$. Donc $\ell(w^{-1}) = \ell(w)$.

(b) et (c) Il suffit de montrer que $\ell(ww') \equiv \ell(w) + \ell(w') \pmod 2$. Tous les autres énoncés de (b) et (c) sont obtenus facilement de ce résultat.

Si $1 \le i < j \le n$, alors nous avons les quatre possibilités suivantes:

1) $(w')^{-1}(i) < (w')^{-1}(j)$ et $w(i) < w(j)$, et conséquemment $ww'((w')^{-1}(i)) < ww'((w')^{-1}(j))$;

2) $(w')^{-1}(i) < (w')^{-1}(j)$ et $w(i) > w(j)$, et conséquemment $ww'((w')^{-1}(i)) > ww'((w')^{-1}(j))$;

3) $(w')^{-1}(i) > (w')^{-1}(j)$ et $w(i) < w(j)$, et conséquemment $ww'((w')^{-1}(i)) < ww'((w')^{-1}(j))$;

4) $(w')^{-1}(i) > (w')^{-1}(j)$ et $w(i) > w(j)$, et conséquemment $ww'((w')^{-1}(i)) > ww'((w')^{-1}(j))$.

Nous obtenons donc que

$$\ell(w) + \ell((w')^{-1}) - \ell(ww') = 2\ |\{1 \le i < j \le n \mid (w')^{-1}(i) > (w')^{-1}(j),\ w(i) > w(j)\}|.$$

Par (a), $\ell(w') = \ell((w')^{-1})$. Le lemme est donc démontré.

4.10 Table des caractères de S_2. Ceci est facile parce que S_2 est isomorphe au groupe abélien cyclique $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$. S_2 a deux éléments et ceux-ci sont dans des classes de conjugaison distinctes. Il y a donc deux caractères irréductibles: le caractère trivial 1_{S_2} et le caractère ε du lemme 4.9. La table des caractères est

S_2	$1 \ge 1$	2
1_{S_2}	1	1
ε	1	-1

Dans la table des caractères, nous avons énuméré les classes de conjugaison de S_2 en utilisant les partages correspondants.

4.11 Table des caractères de S_3. Nous savons que S_3 a six éléments distribués dans trois classes de conjugaison. Nous pouvons facilement énumérer celles-ci en utilisant les partages de 3 comme nous l'avons indiqué en 4.7. Nous avons le tableau suivant

Partage de 3	$1 \ge 1 \ge 1$	$2 \ge 1$	3
Représentant	$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$
Cardinalité	1	3	2

Parce qu'il y a trois classes de conjugaison, alors S_3 a trois caractères irréductibles. Nous en connaissons déjà deux: 1_{S_3} et ε. Pour le troisième caractère irréductible, nous considérons la représentation naturelle

R_{nat} de S_3 obtenue en associant sa matrice de permutation $R_{\text{nat}}(w)$ d'ordre 3×3 à chaque permutation w. Si nous notons le caractère de R_{nat} par χ_{nat}, nous avons le tableau suivant pour ses valeurs prises sur chaque classe de conjugaison.

Partage de 3	$1 \geq 1 \geq 1$	$2 \geq 1$	3
χ_{nat}	3	1	0

Des propositions 3.2 et 3.4 et après avoir calculé

$$(\chi_{\text{nat}},\, \chi_{\text{nat}})_{S_3} = \frac{1}{6}\big((1)(3)(3) + (3)(1)(1) + (2)(0)(0)\big) = 2,$$
$$(\chi_{\text{nat}},\, 1_{S_3})_{S_3} = \frac{1}{6}\big((1)(3)(1) + (3)(1)(1) + (2)(0)(1)\big) = 1$$

nous obtenons que $\chi_{\text{nat}} = 1_{S_3} + \theta$ où θ est le caractère

Partage de 3	$1 \geq 1 \geq 1$	$2 \geq 1$	3
θ	2	0	-1

Nous pouvons conclure que θ est irréductible par la proposition 3.2 en notant que

$$(\theta, \theta)_{S_3} = \frac{1}{6}\big((1)(2)(2) + (3)(0)(0) + 2(-1)(-1)\big) = 1.$$

Finalement la table des caractères de S_3 est

S_3	$1 \geq 1 \geq 1$	$2 \geq 1$	3
1_{S_3}	1	1	1
ε	1	-1	1
θ	2	0	-1

4.11 Table des caractères de S_4. Nous savons que S_4 a 24 éléments distribués dans cinq classes de conjugaison. Nous pouvons facilement énumérer celles-ci en utilisant les partages de 4 comme nous l'avons indiqué en 4.7. Nous avons le tableau suivant

λ	$1 \geq 1 \geq 1 \geq 1$	$2 \geq 1 \geq 1$	$2 \geq 2$	$3 \geq 1$	4
$w(\lambda)$	$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{bmatrix}$
$\lvert cl(\lambda)\rvert$	1	6	3	8	6

où λ désigne un partage de 4, $w(\lambda)$ est une permutation dans la classe de conjugaison correspondant au partage λ et $|cl(\lambda)|$ est la cardinalité de la classe de conjugaison.

Parce que S_4 a 5 classes de conjugaison, alors S_4 a exactement 5 caractères irréductibles. Nous connaissons déjà deux caractères irréductibles: 1_{S_4} et ε. Pour obtenir d'autres caractères irréductibles, nous pouvons considérer la représentation naturelle R_{nat} de S_4 obtenue en associant sa matrice de permutation $R_{\text{nat}}(w)$ d'ordre 4×4 à chaque permutation w. Si nous notons le caractère de R_{nat} par χ_{nat}, nous avons le tableau suivant pour ses valeurs prises sur chaque classe de conjugaison.

λ	$1 \geq 1 \geq 1 \geq 1$	$2 \geq 1 \geq 1$	$2 \geq 2$	$3 \geq 1$	4
χ_{nat}	4	2	0	1	0

Des propositions 3.2 et 3.4 et après avoir calculé

$$(\chi_{\text{nat}},\, \chi_{\text{nat}})_{S_4} = \frac{1}{24}\big((1)(4)(4) + (6)(2)(2) + (3)(0)(0) + (8)(1)(1) + (6)(0)(0)\big) = 2,$$
$$(\chi_{\text{nat}},\, 1_{S_4})_{S_4} = \frac{1}{24}\big((1)(4)(1) + (6)(2)(1) + (3)(0)(1) + (8)(1)(1) + (6)(0)(1)\big) = 1$$

nous obtenons que $\chi_{\text{nat}} = 1_{S_4} + \theta$ où θ est le caractère

λ	$1 \geq 1 \geq 1 \geq 1$	$2 \geq 1 \geq 1$	$2 \geq 2$	$3 \geq 1$	4
θ	3	1	-1	0	-1

Nous pouvons conclure que θ est irréductible par la proposition 3.2 en notant que

$$(\theta, \theta)_{S_4} = \frac{1}{24}\big((1)(3)(3) + (6)(1)(1) + 3(-1)(-1) + (8)(0)(0) + (6)(-1)(-1)\big) = 1.$$

Par la proposition 2.8 (d), nous avons que $\theta\,\varepsilon$ est aussi un caractère de S_4. Ses valeurs sont données par

λ	$1 \geq 1 \geq 1 \geq 1$	$2 \geq 1 \geq 1$	$2 \geq 2$	$3 \geq 1$	4
$\theta\,\varepsilon$	3	-1	-1	0	1

Nous pouvons conclure que $\theta\,\varepsilon$ est irréductible par la proposition 3.2 en notant que

$$(\theta\,\varepsilon, \theta\,\varepsilon)_{S_4} = \frac{1}{24}\big((1)(3)(3) + (6)(-1)(-1) + 3(-1)(-1) + (8)(0)(0) + (6)(1)(1)\big) = 1.$$

Nous avons ainsi calculé 4 des caractères irréductibles. Pour le dernier caractère irréductible, nous pouvons calculer ses valeurs en utilisant le corollaire 3.5 (c) et (d). Notons ce dernier caractère par χ. Parce que $\chi(e) > 0$ et comme conséquence du corollaire 3.5 (c), nous avons que

$$(1)^2 + (1)^2 + (3)^2 + (3)^2 + \left(\chi\left(\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}\right)\right)^2 = 24 \quad \Rightarrow \quad \chi\left(\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}\right) = 2.$$

Maintenant nous pouvons utiliser le corollaire 3.5 (d) et le fait que nous connaissons $\chi(e)$ pour déterminer les valeurs de χ sur les autres classes de conjugaison. Ainsi χ est donné par

λ	$1 \geq 1 \geq 1 \geq 1$	$2 \geq 1 \geq 1$	$2 \geq 2$	$3 \geq 1$	4
χ	2	0	2	-1	0

Finalement la table de caractères de S_4 est

S_4	$1 \geq 1 \geq 1 \geq 1$	$2 \geq 1 \geq 1$	$2 \geq 2$	$3 \geq 1$	4
1_{S_4}	1	1	1	1	1
ε	1	-1	1	1	-1
θ	3	1	-1	0	-1
$\theta\,\varepsilon$	3	-1	-1	0	1
χ	2	0	2	-1	0

Pour le caractère χ, nous aurions aussi pu le construire en notant que θ^2 est un caractère de S_4 à cause de la proposition 2.8 (d). Mais nous avons que $(\theta^2,\, 1_{S_4})_{S_4} = 1$, $(\theta^2,\, \theta)_{S_4} = 1$ et $(\theta^2,\, \theta\,\varepsilon)_{S_4} = 1$. Donc $(\theta^2 - 1_{S_4} - \theta - \theta\,\varepsilon)$ est un caractère. En fait ce caractère est tout simplement χ.

Définition 4.12 Soit un groupe G. Alors le sous-groupe engendré par l'ensemble $\{xyx^{-1}y^{-1} \mid x, y \in G\}$ des commutateurs de G est appelé le groupe dérivé de G. Nous le noterons par $D(G)$.

Lemme 4.13 *Soit un groupe G. Alors*

(a) $D(G)$ est un sous-groupe normal de G tel que le groupe quotient $G/D(G)$ est abélien. De plus, si H est un sous-groupe normal de G tel que le groupe quotient G/H est abélien, alors $D(G) \subseteq H$.

(b) Si $R : G \to \mathbf{C}^\times$ est une représentation de degré 1 de G, alors $\tilde{R} : G/D(G) \to \mathbf{C}^\times$, défini par $\tilde{R}(gD(G)) = R(g)$ pour tout $g \in G$, est une représentation bien définie du groupe abélien $G/D(G)$. Réciproquement si $\tilde{R} : G/D(G) \to \mathbf{C}^\times$ est une représentation de $G/D(G)$ de degré 1, alors $R : G \to \mathbf{C}^\times$, défini par $R(g) = \tilde{R}(gD(G))$ pour tout $g \in G$, est une représentation de G.

(c) Le nombre de caractères irréductibles de degré 1 de G est l'indice de $D(G)$ dans G, i.e. $|G|/|D(G)|$.

Preuve: (a) Pour vérifier que $D(G)$ est normal, il suffit de noter que

$$g(xyx^{-1}y^{-1})g^{-1} = (gxg^{-1})(gyg^{-1})(gxg^{-1})^{-1}(gyg^{-1})^{-1}$$

pour tout $x, y, g \in G$, parce que $D(G)$ est engendré par les commutateurs de G.

Le groupe quotient $G/D(G)$ est abélien parce que

$$(xD(G))(yD(G)) = (xyD(G)) = yxx^{-1}y^{-1}xyD(G) = yxD(G) = (yD(G))(xD(G))$$

car $x^{-1}y^{-1}xy \in D(G)$.

Si H est un sous-groupe normal de G tel que G/H est abélien, il suffit pour vérifier que $D(G) \subseteq H$ de noter que dans G/H, nous avons $xyx^{-1}y^{-1}H = (xH)(yH)(x^{-1}H)(y^{-1}H) = H$ par la commutativité et ainsi obtenir que $xyx^{-1}y^{-1} \in H$. De ceci, nous avons que $D(G) \subseteq H$.

(b) Si R est une représentation de degré 1 de G, alors $R(xyx^{-1}y^{-1}) = R(x)R(y)R(x^{-1})R(y^{-1}) = 1$ pour tout $x, y \in G$. De ceci, nous pouvons conclure que $\tilde{R}$ est une représentation bien définie de degré 1 de $G/D(G)$.

Réciproquement si $\tilde{R} : G/D(G) \to \mathbf{C}^\times$ est une représentation de degré 1 de $G/D(G)$, alors R, défini par $R(g) = \tilde{R}(gD(G))$ pour tout $g \in G$, est $\tilde{R} \circ \pi$, où $\pi : G \to G/D(G)$ est la projection canonique, et conséquemment est une représentation de G de degré 1.

(c) Par ce que nous avons établi en (b), il existe une bijection entre les représentations de degré 1 de G et les représentations de degré 1 de $G/D(G)$. Dans ce dernier cas, ces représentations sont les représentations irréductibles du groupe abélien $G/D(G)$. Mais alors il y a $|G/D(G)|$ caractères irréductibles. Ceci termine la preuve.

Définition 4.14 Une permutation $w \in S_n$ est dite **paire** (respectivement **impaire**) si sa longueur est paire (respectivement impaire). Il est facile de vérifier que l'ensemble $\{w \in S_n \mid \ell(w) \equiv 0 \pmod 2\}$ des permutations paires de S_n est un sous-groupe normal de S_n d'indice 2 appelé le **groupe alterné** et que nous noterons par A_n. Il suffit de noter que A_n est le noyau de l'homomorphisme surjectif $\varepsilon : S_n \to \{-1, 1\}$ de S_n vers le groupe multiplicatif $\{-1, 1\}$.

Exemple 4.15 Nous pouvons illustrer le lemme 4.13 dans le cas particulier de S_4. Il n'est pas difficile de vérifier que le groupe dérivé $D(S_4)$ de S_4 est A_4. En fait, il n'est pas très difficile de vérifier que le groupe dérivé $D(S_n)$ de S_n est A_n pour tout $n \geq 1$. Conséquemment le nombre de caractères irréductibles de degré 1 doit être l'indice de A_4 dans S_4, i.e. 2. C'est bien ce que nous avons obtenu à l'exemple 4.11. De plus comme S_4/A_4 est isomorphe à $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$, nous pouvons facilement déterminer ces deux caractères en passant au quotient.

Nous allons maintenant calculer la table de caractères de A_4. Noter que pour A_2 et A_3, nous connaissons leurs tables de caractères. En effet, A_2 est le groupe trivial $\{e\}$, alors que A_3 est isomorphe à $\mathbf{Z}/3\mathbf{Z}$ étant un groupe à trois éléments et que 3 est un entier premier. Nous avons vu plus tôt ces deux cas.

4.16 Table de caractères de A_4. Le groupe A_4 a 12 éléments. Comme A_4 est normal, si une classe de conjugaison de S_4 a un élément dans A_4, alors elle est complètement contenue dans A_4. De ceci, nous obtenons que A_4 est la réunion disjointe des classes de conjugaison de S_4 correspondant aux partages suivants: $1 \geq 1 \geq 1 \geq 1$, $2 \geq 2$ et $3 \geq 1$. Il faut noter que même si deux éléments sont conjugués dans S_4, ils ne sont pas nécessairement conjugués dans A_4. Cependant si deux éléments de A_4 ne sont pas conjugués dans S_4, alors ils ne peuvent pas être conjugués dans A_4. De tout ceci, nous pouvons ainsi conclure que chacune des classes de conjugaison de S_4 contenues dans A_4 est la réunion disjointe de classes de conjugaison de A_4. Il nous faut maintenant étudier chacune des classes de S_4 contenues dans A_4.

La classe de S_4 correspondant au partage $1 \geq 1 \geq 1 \geq 1$ a un seul élément: l'identité. Donc c'est une classe de conjugaison dans A_4. Nous la noterons aussi $[1 \geq 1 \geq 1 \geq 1]$.

La classe de S_4 correspondant au partage $2 \geq 2$ a 3 éléments. Ceux-ci sont de la forme cyclique $(a, b)(c, d)$ où a, b, c, d sont les entiers de 1 à 4. Clairement si nous avons deux éléments $w = (a, b)(c, d)$ et $w' = (a', b')(c', d')$ appartenant à cette classe, alors une seule des deux permutations suivantes appartient à A_4

$$\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ a' & b' & c' & d' \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ b' & a' & c' & d' \end{pmatrix}.$$

Nous noterons celle-ci par x. Dans ce cas, nous avons $w' = xwx^{-1}$. Conséquemment cette classe de S_4 est une classe de conjugaison de A_4. Nous la noterons aussi $[2 \geq 2]$.

La classe de S_4 correspondant au partage $3 \geq 1$ a 8 éléments. ceux-ci sont de la forme cyclique $(a, b, c)(d)$ où a, b, c, d sont les entiers de 1 à 4. Si nous avons deux éléments $w = (a, b, c)(d)$ et $w' = (a', b', c')(d')$ appartenant à cette classe, alors l'ensemble des éléments x de S_4 tels que $xwx^{-1} = w'$ est

$$\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ a' & b' & c' & d' \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ b' & c' & a' & d' \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ c' & a' & b' & d' \end{pmatrix}.$$

Mais tous ces éléments sont soit dans A_4 ou soit aucun n'appartient à A_4. D'un de ces éléments, nous obtenons les autres en le multipliant par une permutation paire. La conséquence de tout ceci est que cette classe de conjugaison de S_4 se divise en deux classes de conjugaison dans A_4: la classe de conjugaison de la permutation $w = (1, 2, 3)(4)$ que nous noterons par $[3 \geq 1]'$ et celle de la permutation $w = (1, 3, 2)(4)$ que nous noterons par $[3 \geq 1]''$. Il est facile de déterminer la cardinalité de chacune de ces classes. Nous avons le tableau suivant.

Classe	$[1 \geq 1 \geq 1 \geq 1]$	$[2 \geq 2]$	$[3 \geq 1]'$	$[3 \geq 1]''$
Représentant	$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$
Cardinalité	1	3	4	4

Nous pouvons maintenant calculer le groupe dérivé de A_4. Comme $D(A_4)$ est un groupe normal de A_4, si un élément d'une classe de conjugaison de A_4 est dans $D(A_4)$, alors toute la classe est dans $D(A_4)$. Nous pouvons noter que la classe correspondant à $[2 \geq 2]$ est contenue dans $D(A_4)$, parce que

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{bmatrix} = xyx^{-1}y^{-1} \text{ avec } x = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{bmatrix} \text{ et } \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

Il est facile de noter que la réunion des deux classes: $[1 \geq 1 \geq 1 \geq 1]$ et $[2 \geq 2]$ est un groupe normal H tel que le groupe quotient A_4/H a 3 éléments. i.e qu'il est abélien. De tout ce qui précède et du lemme 4.13, nous obtenons que $D(A_4) = H$.

Donc A_4 aura trois caractères irréductibles de degré 1, que nous obtenons en passant au groupe quotient $A_4/D(A_4)$. Ce groupe est

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} D(A_4), \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{bmatrix} D(A_4), \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{bmatrix} D(A_4) \right\}$$

et nous avons

$$\left(\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{bmatrix} D(A_4)\right)^2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{bmatrix} D(A_4).$$

Soit $\alpha = \exp(2\pi i/3) = (-1+\sqrt{3}i)/2$. Alors les valeurs des caractères de degré 1 sur les différentes classes de conjugaison sont

	$[1 \geq 1 \geq 1 \geq 1]$	$[2 \geq 2]$	$[3 \geq 1]'$	$[3 \geq 1]''$
1_{A_4}	1	1	1	1
$\chi_{1,2}$	1	1	α	α^2
$\chi_{1,3}$	1	1	α^2	α

Nous pouvons aussi restreindre une représentation de S_4 à son sous-groupe A_4 et nous obtenons ainsi une représentation de A_4. La valeur de son caractère sur la classe de conjugaison cl est obtenue de celle du caractère de S_4 restreint à la classe de conjugaison de S_4 contenant cl. Ainsi si nous restreignons le caractère θ de notre exemple 4.11 à A_4, nous obtenons le caractère

	$[1 \geq 1 \geq 1 \geq 1]$	$[2 \geq 2]$	$[3 \geq 1]'$	$[3 \geq 1]''$
$\theta\|_{A_4}$	3	-1	0	0

En calculant

$$\big(\theta|_{A_4}, \theta|_{A_4}\big)_{A_4} = \frac{1}{12}\big((1)(3)(3) + (3)(-1)(-1) + (4)(0)(0) + (4)(0)(0)\big) = 1,$$

nous obtenons que $\theta|_{A_4}$ est irréductible. Nous avons ainsi obtenu tous les caractères irréductibles. La table des caractères est

	$[1 \geq 1 \geq 1 \geq 1]$	$[2 \geq 2]$	$[3 \geq 1]'$	$[3 \geq 1]''$
1_{A_4}	1	1	1	1
$\chi_{1,2}$	1	1	α	α^2
$\chi_{1,3}$	1	1	α^2	α
$\theta\|_{A_4}$	3	-1	0	0

Exemple 4.17 Fixons un carré C dans le plan $\mathbf{R}^2$ centré à l'origine. Notons par d: une des droites passant par le milieu d'un côté du carré C et l'origine. Soit le groupe G des isométries du plan qui préserve C. Noter que nous ne supposons pas que ces isométries préservent l'orientation. G est le groupe diédral D_4. Nous étudierons les caractères irréductibles des groupes diédraux plus tard. Maintenant nous allons déterminer ceux de D_4. Notons par R: la rotation du plan centrée à l'origine d'angle $\pi/2$ dans le sens inverse des aiguilles d'une montre et par S: la symétrie du plan fixant la droite d.

Le groupe G est $\{R^i \mid i = 0,1,2,3\} \cup \{SR^i \mid i = 0,1,2,3\}$. Nous pouvons calculer

$$\begin{aligned} R^iR^j(R^i)^{-1} &= R^j, & R^i(SR^j)(R^i)^{-1} &= SR^{(j-2i)}, \\ (SR^i)(R^j)(SR^i)^{-1} &= R^{-j}, & (SR^i)(SR^j)(SR^i)^{-1} &= SR^{(2i-j)}. \end{aligned}$$

Nous obtenons alors que G a cinq classes de conjugaison:

$$\{I = R^0\}, \quad \{R, R^3\}, \quad \{R^2\}, \quad \{S, SR^2\}, \quad \{SR, SR^3\}$$

et G a 5 caractères irréductibles.

Nous avons aussi

$$R^iR^j(R^i)^{-1}(R^j)^{-1} = R^0, \qquad R^i(SR^j)(R^i)^{-1}(SR^j)^{-1} = R^{2i},$$
$$(SR^i)(R^j)(SR^i)^{-1}(R^j)^{-1} = R^{-2j}, \quad (SR^i)(SR^j)(SR^i)^{-1}(SR^j)^{-1} = R^{2(j-i)}.$$

De ceci, nous obtenons que $D(G) = \{I = R^0, R^2\}$ et G a alors $|G|/|D(G)| = 8/2 = 4$ caractères irréductibles de degré 1.

Le groupe $G/D(G)$ est $\{D(G), SD(G), RD(G), SRD(G)\}$. C'est un groupe abélien d'ordre 4, i.e. qu'il est soit isomorphe à $\mathbf{Z}/4\mathbf{Z}$ ou à $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$. Comme chacun des éléments de $G/D(G)$ est d'ordre 2, nous avons que $G/D(G)$ est isomorphe à $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}\times\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$. En fait, cette description en produit direct est la suivante: $G/D(G)$ est isomorphe à $\{D(G), SD(G)\} \times \{D(G), RD(G)\}$. Les valeurs des caractères de degré 1 sur les classes de conjugaison sont

	$\{I\}$	$\{R, R^3\}$	$\{R^2\}$	$\{S, SR^2\}$	$\{SR, SR^3\}$
$\chi_{1,1}$	1	1	1	1	1
$\chi_{1,2}$	1	-1	1	1	-1
$\chi_{1,3}$	1	1	1	-1	-1
$\chi_{1,4}$	1	-1	1	-1	1

Pour le dernier caractère irréductible, notons que nous pouvons utiliser la description géométrique de R et S comme isométries pour associer des matrices. Prenons deux vecteurs unitaires orthonormaux entre eux tels que v_1 est sur la droite d et v_2 est obtenu de v_1 par une rotation d'angle $\pi/2$ dans le sens inverse des aiguilles d'une montre. Alors R et S dans cette base sont données par

$$R = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad S = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Nous pouvons ainsi calculer les matrices pour chacune des isométries et nous obtenons une représentation de D_4. Son caractère est donné par

	$\{I\}$	$\{R, R^3\}$	$\{R^2\}$	$\{S, SR^2\}$	$\{SR, SR^3\}$
θ	2	0	-2	0	0

En calculant

$$(\theta,\, \theta)_{D_4} = \frac{1}{8}\big((1)(2)(2) + (2)(0)(0) + (1)(-2)(-2) + (2)(0)(0) + 2(0)(0)\big) = 1,$$

nous obtenons que θ est irréductible. Donc la table de caractères de D_4 est

D_4	$\{I\}$	$\{R, R^3\}$	$\{R^2\}$	$\{S, SR^2\}$	$\{SR, SR^3\}$
$\chi_{1,1}$	1	1	1	1	1
$\chi_{1,2}$	1	-1	1	1	-1
$\chi_{1,3}$	1	1	1	-1	-1
$\chi_{1,4}$	1	-1	1	-1	1
θ	2	0	-2	0	0

Exemple 4.18 Considérons le groupe quaternionien $Q = \{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\}$ dans l'algèbre des quaternions. Les quaternions forment une algèbre A de dimension 4 sur $\mathbf{R}$ dont les éléments sont de la forme

$(a1 + bi + cj + dk)$ avec $a, b, c, d \in \mathbf{R}$ et telle que 1 est un élément central, $i^2 = j^2 = k^2 = -1$, $ij = k$, $jk = i$, $ki = j$, $ji = -k$, $kj = -i$ et $ik = -j$. Il est facile de calculer les classes de conjugaison de Q. Nous obtenons 5 classes de conjugaison: $\{1\}$, $\{-1\}$, $\{i, -i\}$, $\{j, -j\}$ et $\{k, -k\}$.

Le groupe dérivé est $D(Q) = \{\pm 1\}$. Par exemple $-1 = ij(i)^{-1}(j)^{-1} = k^2$. Q a donc quatre caractères irréductibles de degré 1. Le groupe quotient $Q/D(Q) = \{D(Q), iD(Q), jD(Q), kD(Q)\}$ est isomorphe à $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$. En fait, cette description en produit direct est la suivante: $Q/D(Q)$ est isomorphe à $\{D(Q), iD(Q)\} \times \{D(Q), jD(Q)\}$. Les valeurs des caractères irréductibles de degré 1 sont

	$\{1\}$	$\{\pm i\}$	$\{-1\}$	$\{\pm j\}$	$\{\pm k\}$
$\chi_{1,1}$	1	1	1	1	1
$\chi_{1,2}$	1	-1	1	1	-1
$\chi_{1,3}$	1	1	1	-1	-1
$\chi_{1,4}$	1	-1	1	-1	1

Nous pouvons calculer le dernier caractère irréductible de Q en utilisant le corollaire 3.5 (c) et (d). Nous obtenons ainsi la table de caractères

D_4	$\{1\}$	$\{\pm i\}$	$\{-1\}$	$\{\pm j\}$	$\{\pm k\}$
$\chi_{1,1}$	1	1	1	1	1
$\chi_{1,2}$	1	-1	1	1	-1
$\chi_{1,3}$	1	1	1	-1	-1
$\chi_{1,4}$	1	-1	1	-1	1
θ	2	0	-2	0	0

Nous aurions aussi pu décrire la représentation correspondant au caractère θ. Il suffit de noter que A est une algèbre de dimension 2 sur $\mathbf{C}$. En effet, $(a + bi + cj + dk) = \alpha + \beta j$, où $\alpha = a + bi$ et $\beta = c + di$. Chaque élement de Q est inversible. La représentation correspondant à θ est définie par $R : Q \to GL(A)$ où $R(x)$ est l'homomorphisme $(\alpha + \beta j) \mapsto (\alpha + \beta j)(x^{-1})$. Les matrices $R(x)$ pour $x \in Q$ sont

$$R(\pm 1) = \pm \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad R(\pm i) = \pm \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}, \quad R(\pm j) = \pm \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad R(\pm k) = \pm \begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix}.$$

Remarque 4.19 Noter que D_4 et Q ont la même cardinalité, le même nombre de classes de conjugaison et la même table de caractères. Mais ces deux groupes ne sont pas isomorphes. En effet, nous pouvons calculer l'ordre des éléments de D_4 et de Q. Nous obtenons ainsi que I est d'ordre 1; R^2, S, SR, SR^2, SR^3 sont d'ordre 2; R et R^3 sont d'ordre 4. Pour Q, 1 est d'ordre 1; -1 est d'ordre 2 et tous les autres éléments sont d'ordre 4. Donc si deux groupes ont la même table de caractères à permutation près, nous ne pouvons pas conclure de ceci qu'ils sont isomorphes.